Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 2

Matemáticas I (MA-1111)

Geometría Analítica.

Rectas, circunferencias, distancia y punto medio.

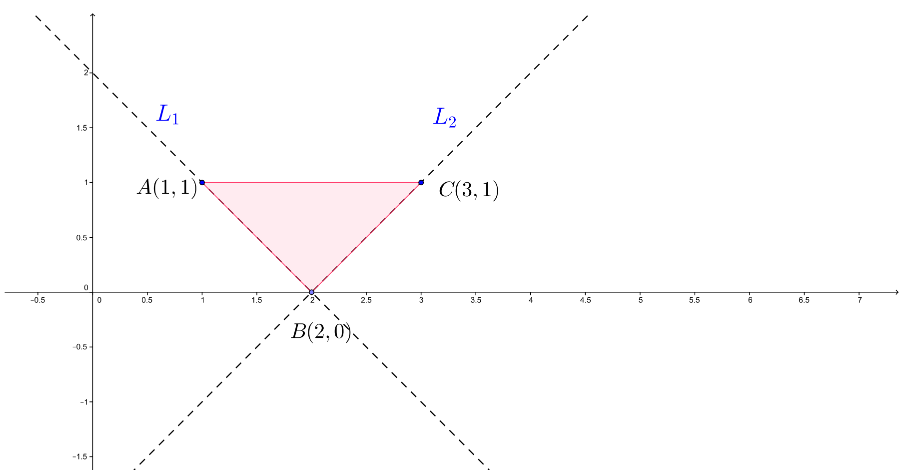
Ejemplo 1. *Sea T un triángulo de vértices :* $A(1,1), B(2,0), C(3,1)$.

a. *Verifique analíticamente que T es un triángulo rectángulo.*

b. *Diga si es cierto que el punto medio de la hipotenusa del triángulo T equidista de los tres vértices.*

Solución:

Parte a : Para la resolución de todo problema de geometría se recomienda hacer un pequeño bosquejo tanto para sí mismo como para el lector de su ejercicio (profesor).



Como nos piden que verifiquemos analíticamente que T es un triángulo rectángulo debemos hallar relaciones (ecuaciones) que demuestren este hecho.

Sabemos que un triángulo rectángulo tiene un ángulo interno de 90º. Fíjese que los tres segmentos que forman el triángulo T están sobre tres rectas. Si existe algún ángulo recto en T entonces los segmentos que forman dicho ángulo son perpendiculares, por lo tanto las rectas que los contienen también.

Rectas perpendiculares.

Sean L_1 y L_2 dos rectas perpendiculares entonces sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen:

$$m_1 . m_2 = -1 \tag{1}$$

Supongamos que el ángulo $\angle ABC$ es el ángulo recto, entonces las rectas señaladas en la figura deben ser perpendiculares y deben satisfacer (1).

Calculamos la pendiente de la recta L_1 que pasa por $B(2,0)$ y $C(3,1)$:

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-3} = 1$$

Note que es indiferente si usted escoge cualquier punto sobre la recta como el (x_1, y_1) o el (x_2, y_2), la pendiente no va a cambiar.

Luego la pendiente de la recta L_2 que pasa por $A(1,1)$ y $B(2,0)$:

$$m_2 = \frac{1-0}{1-2} = -1$$

Efectivamente:

$$m_1 . m_2 = (1)(-1) = -1 \qquad \text{Se cumple (1)}$$

En vista que L_1 y L_2 son perpendiculares, el ángulo $\angle ABC$ es de 90º.

Luego **T es un triángulo rectángulo.**

Parte b : Para saber si P equidista de los vértices del triángulo T debemos calcular las distancias entre P y cada vértice, pero antes debemos calcular P el punto medio de la hipotenusa del triángulo.

Punto Medio entre dos puntos.

El punto medio entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Como el punto P es el punto medio entre $A(1,1)$ y $C(3,1)$ podemos calcularlo así:

$$P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = P(2,1)$$

Ahora calculamos las distancias entre P y los vértices:

Distancia entre dos puntos.

La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

Usamos (2) para calcular las distancias:

Distancia entre $P(2,1)$ y $A(1,1)$= $\overline{PA} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = 1$

Distancia entre $P(2,1)$ y $B(2,0)$= $\overline{PB} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2} = 1$

Distancia entre $P(2,1)$ y $C(3,1)$= $\overline{PC} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2} = 1$

Como:

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

Entonces P equidista de los tres vértices del triángulo rectángulo.

Ejemplo 2. *Sea L la recta de ecuación $4y - 3x + 18 = 0$ y $P(-4,5)$ un punto.*

a. *Halle la ecuación de la recta L' que es paralela a L y pasa por P.*

b. *Halle la ecuación de la circunferencia tangente a L y L' que pasa por P.*

Solución:

Parte a :

Como nos piden hallar una recta debemos tener como dato por lo menos su pendiente y un punto o dos puntos sobre dicha recta. Ya tenemos un punto, nos faltaría otro punto o la pendiente. Sin embargo nos dan como dato que la nueva recta L' es paralela a la recta L.

Rectas Paralelas.

Sean dos rectas paralelas L_1 y L_2 entonces sus pendientes son iguales.

Por lo tanto la recta que construiremos tiene la misma pendiente que la recta L, por ser paralelas.

Como $L \equiv 4y - 3x + 18 = 0$ está expresada en forma general y necesitamos ver su pendiente, la llevaremos a la forma pendiente-ordenada en el origen o m-b. Esto se hace despejando y de la ecuación general:

$$\begin{aligned} 4y - 3x + 18 &= 0 \\ 4y &= 3x - 18 \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

De aquí podemos identificar que la pendiente de L es $m = \frac{3}{4}$ que será la pendiente de nuestra nueva recta L'.

Ahora podemos construir la ecuación de la recta L' con el punto y la pendiente.

Ecuación punto-pendiente.

La ecuación de una recta que tiene pendiente m y pasa por el punto (x_o, y_o) está dada por:

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad \text{Ecuación punto-pendiente.}$$

De modo que la recta L' que tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$ y pasa por $P(-4, 5)$ está dada por:

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x + 4)$$
$$\Longrightarrow y = \frac{3}{4}x + 3 \Longrightarrow y = \frac{3}{4}x + 8$$

Parte b : Ahora debemos calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por P y es tangente a las dos rectas L y L'.

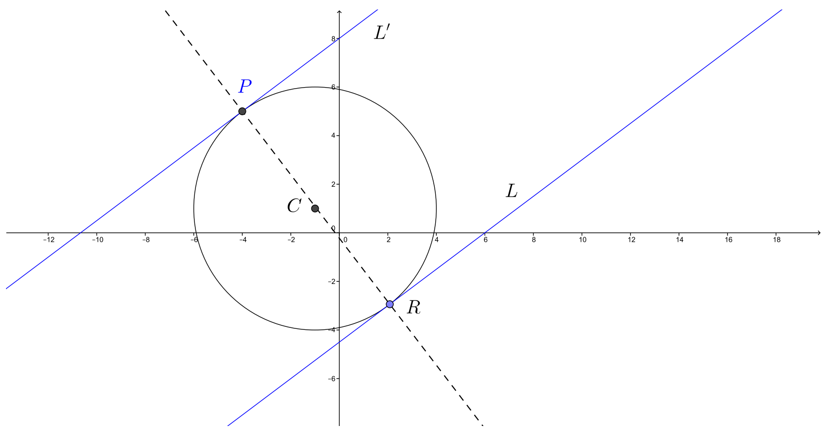
Ecuación de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(h, k)$ y radio r está dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Para calcular la ecuación de una circunferencia necesitamos su centro y su radio. Podemos observar el bosquejo y notar que una recta que sea perpendicular a L' en el punto P pasa también por el centro de la circunferencia, más aún, puesto que las rectas L y L' son paralelas entonces la recta punteada intersecta a L en el punto de tangencia R.

Si logramos encontrar el punto de tangencia R entonces podremos encontrar el centro de la circunferencia ya que como R, C y P son colineales entonces C no es más que el punto medio entre R y P.



Para hallar R note que este es el punto de intersección entre la recta punteada y L que es dato del problema y está definida como $4y - 3x + 18 = 0$.

Debemos hallar la ecuación de la recta punteada e intersecarla con L (plantear un sistema de ecuaciones).

Para hallar la ecuación de la recta punteada:

Sabemos que esta recta es perpendicular a L por lo tanto su pendiente está dada por:

$$m.m_L = -1 \Longrightarrow m.(\frac{3}{4}) = -1 \Longrightarrow m = -\frac{4}{3} \qquad \text{(Rectas perpendiculares.)}$$

Además esta recta también pasa por P de modo que podemos encontrar su ecuación usando la punto-pendiente:

$$\begin{aligned} (y-5) &= (-\frac{4}{3})(x+4) && \text{(LLevaremos la recta a la forma general por conveniencia.)} \\ 3(y-5) &= -4(x+4) \\ 3y - 15 &= -4x - 16 \\ 3y + 4x + 1 &= 0 && \text{(Forma general de la recta.)} \end{aligned}$$

Luego intersecamos esta recta con $L \equiv 4y - 3x + 18 = 0$ planteando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y + 4x + 1 &= 0 \\ 4y - 3x + 18 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9y + 12x + 3 = 0 \\ \underline{16y - 12x + 72 = 0} \end{cases}$$
$$25y + 75 = 0 \Rightarrow y = -3$$

Luego sustituimos $y = -3$ en alguna de las ecuaciones para obtener x:

$$3y + 4x + 1 = 0 \Longrightarrow 3(-3) + 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Hemos encontrado que las recta punteada y la recta L se intersecan en $R(2, -3)$.

Luego el centro de la circunferencia es el punto medio entre $P(-4, 5)$ y $R(2, -3)$:

$$C\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = C(-1, 1)$$

Ahora el radio de la circunferencia está dado por la distancia que hay entre el centro C y cualquier punto sobre la circunferencia como P y R. Escogemos P, luego:

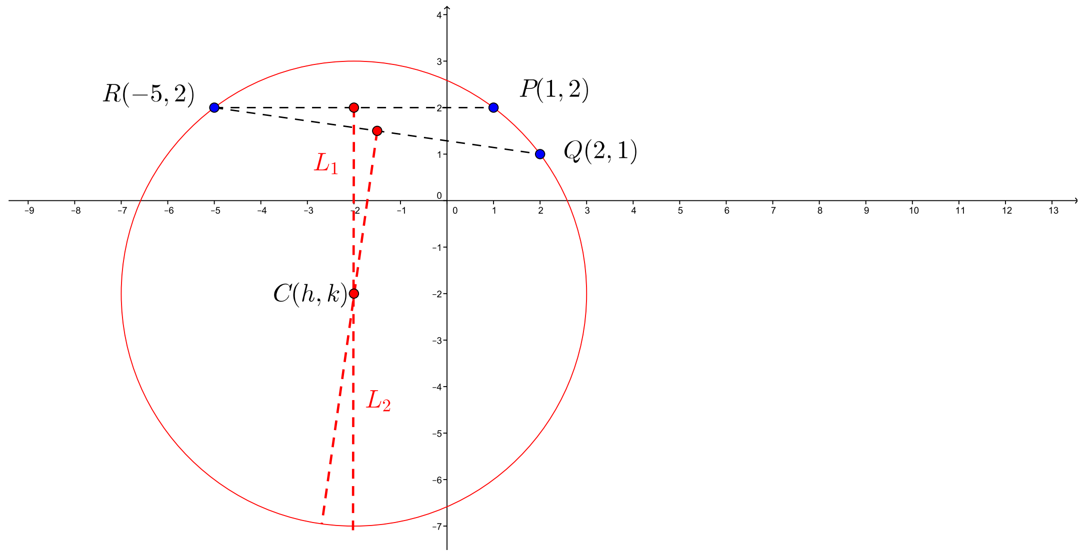
$$r = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Finalmente podemos escribir la ecuación de la circunferencia:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = (5)^2 \Longrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Ejemplo 3. *Halle la ecuación que describe a la circunferencia que pasa por los puntos:* $P(1, 2)$, $Q(, 2, 1)$,$R(-5, 2)$

Para resolver este problema debemos saber que una recta perpendicular a una secante, a una circunferencia, en su punto medio pasa también por el centro de la circunferencia. Esto se ilustra en el bosquejo:



Note que se puede trazar una secante que pase por los puntos R y P, además se puede trazar una recta perpendicular a dicha secante y que pase por el punto medio entre R y P, la hemos llamado L_1, esta recta pasa también por el centro de la circunferencia. Igual sucede con L_2.

Si somos capaces de encontrar las ecuaciones de L_1 y L_2 y las intersectamos obtendremos el centro de la circunferencia.

Para hallar L_2:

Observe que esta recta es perpendicular a la recta secante que pasa por $R(-5,2)$ y $Q(2,1)$ cuya pendiente es conocida pues podemos conocer la pendiente de una recta que pasa por dos puntos:

$$m_{RQ} = \frac{2-1}{-5-2} = -\frac{1}{7} \qquad \text{(Pendiente de la recta que pasa por R y Q)}$$

Entonces la pendiente de la recta L_2 está dada por

$$m_2.m_{RQ} = -1 \Longrightarrow m_2.(-\frac{1}{7}) = -1 \Longrightarrow m_2 = 7 \qquad \text{(Pendiente de } L_2\text{)}$$

Por otro lado necesitamos un punto sobre L_2 pero como ya hemos dicho para que esta recta pase por el centro debe ser perpendicular a la secante en el punto medio entre $R(-5,2)$ y $Q(2,1)$, luego este el punto que nos hace falta.

$$P_2\left(\frac{-5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = P_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \qquad \text{(Punto medio entre } R \text{ y } Q\text{)}$$

Luego la recta L_1 está dada por:

$$\begin{aligned}
y - \frac{3}{2} &= 7(x - (-\frac{3}{2})) \\
y - \frac{3}{2} &= 7x + \frac{21}{2} \\
y - 7x &= 12 && \text{(Ecuación de la recta } L_1\text{)}
\end{aligned}$$

Análogamente para la recta L_1:

Hallamos la pendiente de la secante que pasa por $R(-5, 2)$ y $P(1, 2)$

$$m_{RP} = \frac{2-2}{-5-1} = 0 \qquad \text{(Pendiente de la recta que pasa por } R \text{ y } Q.\text{)}$$

Era de esperarse este resultado pues en el bosquejo se nota como esta recta es horizontal. Luego la pendiente de la recta L_1 está dada por :

$$m_1 = -\frac{1}{m_{RP}}$$

Pero la división entre cero no está definida, así que no podemos sustituir el valor de m_{RP}. Esto solo significa que la pendiente de la recta L_1 es infinita, es decir, L_1 **es una recta vertical**.

Rectas con pendiente infinita.

Una recta con pendiente indefinida o infinita está dada por la ecuación:

$$x = a$$

donde a es la abscisa por donde pasa la recta.

Como no tenemos pendiente para L_2 no podemos usar la ecuación punto-pendiente, usaremos nuestro razonamiento. L_2 debe pasar por el punto medio entre $R(-5, 2)$ y $P(1, 2)$ que está dado por:

$$P_1\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = P_1(-2, 2) \qquad \text{(Punto medio entre R y P.)}$$

Como L_1 es una recta vertical y debe pasar por P_1 entonces la ecuación de la recta está dada por:

$$x = -2 \qquad \text{(Ecuación de la recta } L_1\text{)}$$

Se espera que con la breve explicación, la ayuda del bosquejo y su estudio de la asignatura, entienda el porqué la forma de esta última ecuación.

Ahora con la ecuaciones de ambas rectas podemos plantear un sistema de ecuaciones para hallar el centro de la circunferencia.

$$\begin{cases} y - 7x = 12 \\ x = -2 \end{cases} \Longrightarrow y - 7(-2) = 12 \Longrightarrow y = -2$$

Luego el centro de la circunferencia es por $C(-2, -2)$.

Como ya sabemos el radio es la distancia entre el centro y cualquier punto sobre la circunferencia, usaremos el punto $P(1, 2)$. Luego:

$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-2)^2} = 5 \qquad \text{(Radio de la circunferencia.)}$$

Finalmente podemos escribir la ecuación de la circunferencia así:

$$(x - (-2))^2 + (y - (-2))^2 = 5^2 \Longrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

Segundo método de resolución: Este problema se puede resolver de forma más analítica planteando un sistema de ecuaciones.

Sabemos que los puntos $P(1, 2)$, $Q(, 2, 1)$,$R(-5, 2)$ están sobre la circunferencia por lo tanto los tres deben satisfacer la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

De modo que podemos escribir el sistema:

$$\begin{cases} (1-h)^2 + (2-k)^2 = r^2 & (1) \\ (2-h)^2 + (1-k)^2 = r^2 & (2) \\ (-5-h)^2 + (2-k)^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Como es un sistema 3×3 , tres variables y tres ecuaciones, entonces se pueden encontrar soluciones particulares.

Para solucionarlo usamos el método de igualación.

$$
\begin{aligned}
(1-h)^2 + (2-k)^2 &= (-5-h)^2 + (2-k)^2 \\
(1-h)^2 &= (-5-h)^2 \\
1 - 2h + h^2 &= 25 + 10h + h^2 \\
1 - 2h &= 25 + 10h \\
h &= -2
\end{aligned}
$$

Ahora, igualamos cualquiera de las tres ecuaciones sustituimos $h = -2$ despejamos k.

$$
\begin{aligned}
(2-h)^2 + (1-k)^2 &= (1-h)^2 + (2-k)^2 \\
(2-(-2))^2 + (1-k)^2 &= (1-(-2))^2 + (2-k)^2 \\
16 + (1-k)^2 &= 9 + (2-k)^2 \\
16 + 1 - 2k + k^2 &= 9 + 4 - 4k + k^2 \\
17 - 2k &= 13 - 4k \\
2k &= -4 \\
k &= -2
\end{aligned}
$$

Ahora tomamos cualquiera de las tres ecuaciones sustituimos h y k y despejamos el radio.

$$(1-h)^2 + (2-k)^2 = r^2 \Longrightarrow (1+2)^2 + (2+2)^2 = r^2 \Longrightarrow r^2 = 25$$

Finalmente con h, k y r^2 podemos escribir la ecuación de la circunferencia:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Observe que este método es más rápido sin embargo ambos métodos son válidos.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.